

# Ces conjectures, si faciles à énoncer et pourtant non démontrées

**Les mathématiciens appellent « conjectures » des énoncés, souvent simples et faciles à comprendre, correspondant à des propriétés pour lesquelles aucun contre-exemple n'a été trouvé mais qui restent toujours non démontrées.**

Le grand arithméticien Pierre de Fermat<sup>1</sup> a été à l'origine de plusieurs de ces conjectures dont certaines ont fini par être démontrées beaucoup plus tard. En 1637, il énonce qu'il n'existe pas de nombres entiers strictement positifs  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que :  $x^n + y^n = z^n$  dès que  $n$  est un entier strictement supérieur<sup>2</sup> à 2. C'est le mathématicien anglais Andrew Wiles qui en apportera une démonstration (en près de 1 000 pages !) en 1994, trois siècles et demi plus tard !

D'autres conjectures restent coriaces et résistent à toute tentative de démonstration mathématique. La conjecture de Goldbach, formulée en 1742, s'énonce simplement : *tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers*. Par exemple  $14=11+3$  ou  $20=17+3$ . Grâce aux calculateurs numériques, la propriété a été vérifiée<sup>3</sup> pour tous les entiers pairs jusqu'à  $4 \times 10^{18}$ , mais jamais démontrée.

La conjecture dite de Syracuse est plus récente, elle date du milieu du XX<sup>e</sup> siècle. On la doit à un mathématicien allemand, Lothar Collatz (1910 – 1970). Une suite de Syracuse est une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier strictement positif ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et l'on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers strictement positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur. La conjecture énonce que *la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement po-*



**Dominique Maillard**  
Ingénieur général honoraire des mines

*stif finit par atteindre*. Par exemple la suite commençant par 7 se déroule ainsi : 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. L'étude systématique du comportement de la suite de Syracuse à l'aide d'ordinateurs a permis de tester la conjecture pour des nombres de départ de plus en plus grands. En 2025 on a ainsi vérifié que la conjecture se vérifie pour tout nombre inférieur à  $2^{71}$  (soit un nombre de 21 chiffres). La démonstration n'existe pas à l'heure qu'il est.

Encore une petite dernière ! Tout nombre auquel on ajoute son nombre inversé<sup>4</sup> semble finir par aboutir à un nombre palindrome (c'est-à-dire un nombre qui peut se lire de manière identique de droite à gauche comme de gauche à droite, tel 17571 par exemple). La plupart des nombres vérifient bien cet énoncé. Ainsi  $59 \rightarrow 59 + 95 = 154$  ;  $154 \rightarrow 154 + 451 = 605$  ;  $605 \rightarrow 605 + 506 = 1\ 111$ , qui est un nombre palindrome. Cependant certains nombres résistent à cette itération et ne semblent pas donner de palindrome quand on pratique l'itération précédente. C'est le cas de 196, qui est le plus petit des candidats potentiels. Le problème est que l'on n'arrive pas à montrer que pour ces nombres le processus ne s'arrête pas. On appelle ainsi nombre

*de Lychrel un entier naturel qui ne peut pas former de nombre palindrome lorsqu'il est soumis au processus itératif qui consiste à l'additionner au nombre formé de l'inversion de ses chiffres*. À l'heure actuelle, il n'existe aucune procédure mathématique permettant de déterminer avec certitude si un nombre est un nombre de Lychrel<sup>5</sup>, de sorte qu'à ce jour, on ne sait même pas s'ils existent vraiment. On peut évidemment faire « tourner » des ordinateurs pour reproduire l'itération et voir si l'on obtient un palindrome. On a ainsi atteint, à partir de 196, un nombre à un million de chiffres après... 2 415 836 itérations sans parvenir à un palindrome ! Il existe treize nombres inférieurs à 1000, candidats à l'appellation « nombre de Lychrel », c'est-à-dire pour lesquels on n'a pas trouvé, pour le moment, de palindrome : 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986. Mais ce n'est toujours pas démontré. Vous pouvez vous y essayer et tenter votre chance ! Ces problèmes non résolus attirent évidemment certains esprits curieux. Ils ont aussi le mérite de montrer qu'il reste des choses à trouver ou à prouver en mathématiques, comme dans toutes les sciences au demeurant. L'homme a encore bien des choses à approfondir, seul ou avec l'aide des machines qu'il a lui-même inventées mais qui restent, à ce jour, dénuées d'intuition. Certains mathématiciens ont l'intuition d'une propriété, les machines, par le calcul, n'arrivent pas à trouver le contre-exemple. Malheureusement, ce n'est pas une démonstration car l'absence de preuve de l'inexactitude n'est pas la preuve de l'exactitude... (phrase qui peut mériter une deuxième lecture !) ■

1 Pierre de Fermat (1607 - 1665) est un magistrat de Toulouse, mathématicien, aussi poète, habile latiniste et helléniste. Il s'est intéressé particulièrement à l'arithmétique et à l'optique. Il a correspondu avec les plus grands savants de son époque dont Blaise Pascal, Torricelli, Descartes et le père Mersenne.

2 Pour  $n=2$ , on reconnaît la propriété de Pythagore avec par exemple  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

3 Tomás Oliveira e Silva, Siegfried Herzog et Silvio Pardi en 2014.

4 Le nombre inversé est le nombre obtenu en écrivant dans l'ordre inverse les chiffres qui le composent. Ainsi 5202 est le nombre inversé de 2025.

5 Le nom « Lychrel » a été inventé par Wade VanLandingham : il s'agit d'une quasi-anagramme du nom de sa fiancée, Cheryl. Wade VanLandingham est actuellement vice-président des ventes de la société informatique américaine « SageNet ».